Mécanique céleste

Le mouvement d'un corps céleste dans un champ de gravitation et les satellites

Cours – Terminale spécialité Physique-Chimie

Objectifs :

- Connaître et exploiter les **trois lois de Kepler**.
- Déterminer les caractéristiques des vecteurs **vitesse** et **accélération** d'un corps en mouvement circulaire dans un champ de gravitation.
- **Établir et exploiter la troisième loi de Kepler** dans le cas du mouvement circulaire.
- Caractériser un **satellite géostationnaire** et calculer son altitude et sa vitesse.

1 La force de gravitation (rappel)

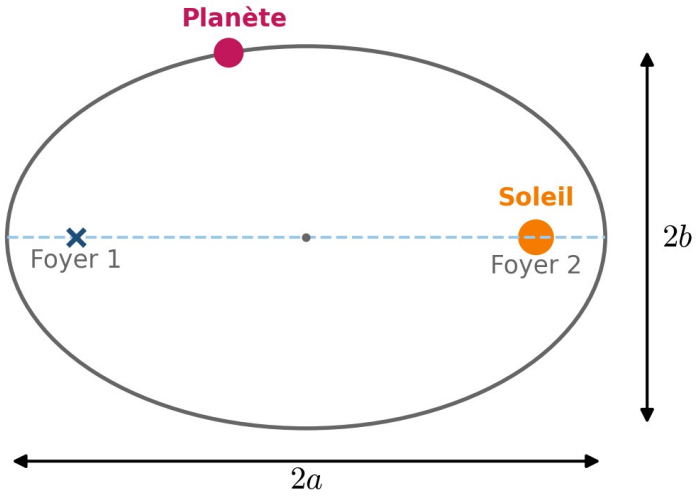
En français	Deux corps ponctuels A et B, de masses m_A et m_B, s'**attirent mutuellement**. Les deux forces d'attraction ont **même direction** (la droite qui joint A et B), **même valeur** et des **sens opposés** : c'est la troisième loi de Newton. La valeur de la force est **proportionnelle aux masses** et **inversement proportionnelle au carré de la distance d** qui sépare les deux corps. Ici, $\vec{u}_{A\to B}$ est le vecteur unitaire dirigé de A vers B, G = 6,67×10^{-11} N·m²·kg^{-2} est la constante de gravitation, les masses sont en kg et la distance en m.
En formules	$$F_{A/B} = F_{B/A} = G\frac{m_A\, m_B}{d^2}$$ $$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G\frac{m_A\, m_B}{d^2}\,\vec{u}_{A\to B}$$

2 Les trois lois de Kepler

Johannes Kepler a établi trois lois qui décrivent le mouvement des planètes autour du Soleil. Elles s'appliquent aussi aux satellites autour de leur planète. On les énonce dans un référentiel **héliocentrique** (pour les planètes) ou **géocentrique** (pour les satellites de la Terre).

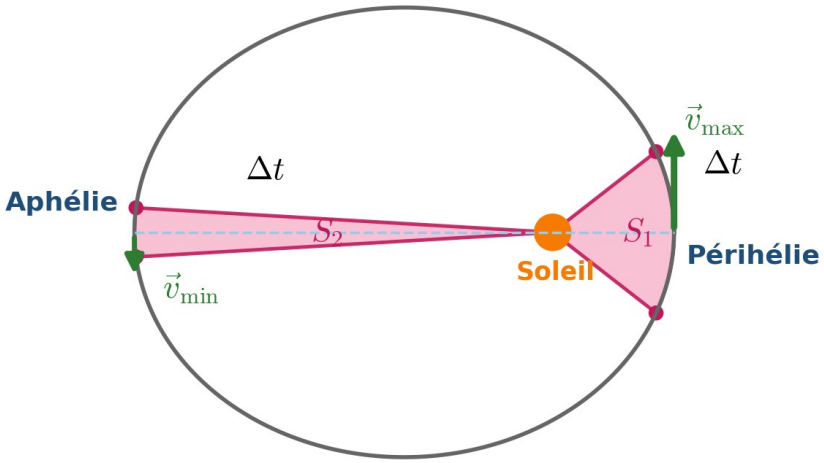
Première loi : la loi des orbites

En français	Les planètes et les satellites décrivent une **orbite elliptique plane** dont le **centre attracteur est l'un des foyers**. Une ellipse possède **deux foyers** ; la somme des distances d'un point de l'ellipse aux deux foyers est constante. Son plus grand axe mesure **2a** (a est le **demi-grand axe**) et son plus petit axe mesure **2b**.



Deuxième loi : la loi des aires

En français	Le segment qui relie le Soleil à la planète **balaie des aires égales pendant des durées égales**. Sur le schéma, les deux surfaces roses sont égales ($S_1 = S_2$) parce qu'elles sont balayées pendant la même durée Δt. Le long de son orbite, la planète passe par deux points particuliers : le **périhélie**, point de l'orbite le **plus proche** du Soleil, et l'**aphélie**, point le **plus éloigné**. (Quand l'astre attracteur est la Terre, on parle de **périgée** et d'**apogée**.)



En français	Pour une même durée, l'aire balayée doit rester la même. Près de l'aphélie, le segment est long : il faut un arc **court** pour obtenir la même aire, donc la planète va **lentement**. Près du périhélie, le segment est court : il faut un arc **long**, donc la planète va **vite**. Sa vitesse n'est donc pas constante. **Vitesse maximale au périhélie, vitesse minimale à l'aphélie.**

Troisième loi : la loi des périodes

En français	La **période de révolution T** est la durée que met un corps pour effectuer un tour complet de son orbite. Elle est reliée au **demi-grand axe a** de l'ellipse : le rapport entre le carré de la période et le cube du demi-grand axe est le même pour tous les corps qui tournent autour du même astre. Cette constante dépend donc **de l'astre attracteur** (sa masse M_{astre}), pas du corps en orbite.
En formules	$\dfrac{T^2}{a^3} = \text{constante} \qquad \text{avec} \qquad \dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_{\text{astre}}}$

T en secondes, a en mètres (ou rayon de l'orbite si elle est quasi circulaire), M_{astre} en kg.

⚠️ **Attention**

- La constante de la troisième loi **n'est pas universelle** : elle change si l'astre attracteur change (Soleil, Terre, Jupiter…).
- Ici, **a** désigne le **demi-grand axe** de l'ellipse, une longueur en mètres : ce n'est **pas** l'accélération.

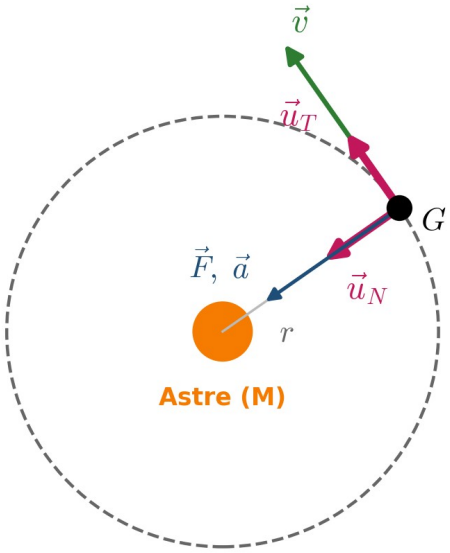
À RETENIR

1ère loi : orbite elliptique, astre attracteur à un foyer. **2ème loi** : aires égales pendant des durées égales (vitesse max. au périhélie, min. à l'aphélie). **3ème loi** : T^2/a^3 = constante, qui ne dépend que de l'astre attracteur.

3 Mouvement circulaire uniforme d'un satellite ou d'une planète

En français	Un cercle est une ellipse particulière : ses deux foyers sont confondus au centre O et ses demi-axes sont égaux au rayon r. On considère un corps de masse m, assimilé à son centre de gravité G, qui décrit une **orbite circulaire** de rayon r autour d'un astre de masse M, assimilé à son centre O.

Système	Référentiel	Bilan des forces
le corps de masse m (centre de gravité G), constante	héliocentrique (planètes) ou géocentrique (satellites de la Terre), supposé galiléen	la force de gravitation exercée par l'astre seule ; les autres forces sont négligées



Le repère de Frenet

En français	Pour décrire un mouvement circulaire, on utilise un **repère mobile** lié au corps : le repère de Frenet (G, $\vec{u}_N$, $\vec{u}_T$). Son origine est le point mobile G. Le vecteur unitaire $\vec{u}_N$ (normal) est perpendiculaire à la trajectoire et **pointe vers le centre** du cercle. Le vecteur unitaire $\vec{u}_T$ (tangent) est tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est donc toujours porté par $\vec{u}_T$.

Accélération centripète

En français	La deuxième loi de Newton relie la force à l'accélération. La seule force est l'attraction de l'astre, dirigée de G vers O, c'est-à-dire selon $\vec{u}_N$. La masse m se simplifie : l'accélération est donc **dirigée vers le centre** (on dit qu'elle est **centripète**) et **ne dépend pas de la masse du corps** en orbite.

En formules	$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \implies G\frac{m\,M}{r^2}\,\vec{u}_N = m\,\vec{a} \implies \vec{a} = G\frac{M}{r^2}\,\vec{u}_N$$

Vitesse : un mouvement uniforme

En français	Dans le repère de Frenet, l'accélération s'écrit avec deux composantes : une **composante tangentielle** dv/dt, qui change la valeur de la vitesse, et une **composante normale** v^2/r, qui change sa direction. Il suffit d'**identifier** cette écriture avec le résultat précédent. Comme $\vec{a}$ n'a qu'une composante selon $\vec{u}_N$, la composante tangentielle est **nulle**.
En formules	$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{r}\,\vec{u}_N$$ $$\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \frac{v^2}{r} = G\frac{M}{r^2}$$
En français	**Première égalité :** dv/dt = 0, donc la vitesse est constante : le mouvement est **uniforme**. **Deuxième égalité :** elle donne la valeur de cette vitesse, qui dépend de l'astre (M) et du rayon de l'orbite (r), mais pas de la masse du satellite. Plus l'orbite est grande, plus le satellite va lentement.
En formules	$$\frac{dv}{dt} = 0 \implies v = \text{constante} \qquad v^2 = \frac{G\,M}{r} \implies v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}$$

Remarque

On peut aussi montrer qu'une orbite circulaire est forcément uniforme avec la **deuxième loi de Kepler** : le segment [OG] a une longueur constante, donc pour que les aires balayées soient égales pendant une même durée Δt, l'arc de cercle parcouru doit être le même à chaque fois, donc la vitesse est constante.

Période de révolution et troisième loi de Kepler

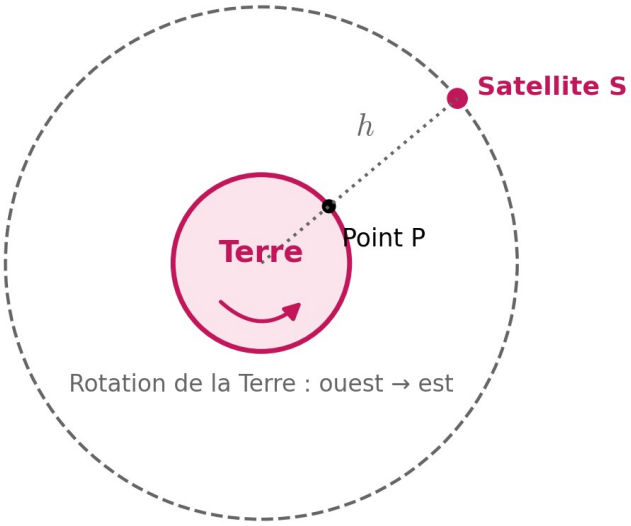
En français	Le mouvement étant uniforme, la vitesse est la distance parcourue en un tour (le périmètre du cercle, 2πr) divisée par la durée d'un tour (la période T). On **égale** alors les deux expressions de la vitesse, on élève au carré, puis on isole T^2/r^3 : on retrouve la **troisième loi de Kepler**, avec a = r.
En formules	$$v = \frac{2\pi r}{T}$$ $$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{G\,M}{r}} \implies \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G\,M}{r} \implies \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$$ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M}}$$

À RETENIR

Pour une orbite circulaire de rayon r autour d'un astre de masse M : l'accélération est **centripète** ($a = GM/r^2$), le mouvement est **uniforme**, $v = \sqrt{(GM/r)}$, et $T = 2\pi\sqrt{(r^3/GM)}$. Ces résultats **ne dépendent pas de la masse du satellite**.

4 Les satellites géostationnaires

En français	Un satellite **géostationnaire** est **immobile par rapport au sol** : il reste constamment au-dessus du même point de la surface de la Terre. Pour cela, il doit tourner exactement **en même temps que la Terre**.



Vue de dessus (au-dessus du pôle Nord) — schéma non à l'échelle

Les trois conditions

- Son orbite est **circulaire** et située dans le **plan équatorial** (perpendiculaire à l'axe des pôles).
- Il tourne **dans le même sens** que la Terre (d'ouest en est).
- Sa **période de révolution** est égale à la période de rotation propre (sidérale) de la Terre : **T = 1 jour sidéral = 23 h 56 min 4 s = 86 164 s** (environ 24 h).

Altitude du satellite géostationnaire

En français	Pour un satellite de la Terre, le rayon de l'orbite est r = R_T + h (rayon de la Terre + altitude). On part de l'expression de la période, on impose T = 86 164 s, puis on isole h. **Attention** : il faut soustraire le rayon de la Terre à la fin.
En formules	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R_T+h)^3}{G\,M_T}} \iff h = \sqrt[3]{\dfrac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}} - R_T$ $h = \sqrt[3]{\dfrac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}\times86164^2}{4\pi^2}} - 6{,}37\times10^6 \approx 3{,}58\times10^7\ \text{m} \approx 36\,000\ \text{km}$

Données : G = 6,67×10^{-11} N·m²·kg^{-2} ; M_T = 5,98×10^{24} kg ; T = 86 164 s ; R_T = 6,37×10^3 km.

Vitesse du satellite géostationnaire

En français	On applique la formule de la vitesse en mouvement circulaire uniforme, avec r = R_T + h. Le satellite se déplace à environ 3,08×10^3 m·s^{-1}, soit **plus de 11 000 km·h^{-1}**.
En formules	$v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T+h}} = \sqrt{\dfrac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{6{,}37\times10^6+3{,}58\times10^7}} \approx 3{,}08\times10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

À quoi servent-ils ?

Les satellites géostationnaires ont deux atouts : ils sont **immobiles** par rapport à la surface terrestre, et leur orbite équatoriale et leur altitude élevée leur permettent de **couvrir en permanence plus d'un tiers de la planète**. On distingue :

- les **satellites scientifiques** : étude de la Terre, observatoires spatiaux, expériences en impesanteur ;
- les **satellites d'applications**, civils ou militaires : télécommunications, navigation, météorologie.

5 Application : la Station spatiale internationale

Énoncé

La Station spatiale internationale (ISS), de masse m_{ISS}, décrit une orbite **circulaire** autour de la Terre à l'altitude **h ≈ 400 km**. On étudie son mouvement dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. Seule la force de gravitation exercée par la Terre est prise en compte.

Données : $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻² ; $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}37\times10^{3}$ km.

1. Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération. **2.** Montrer que le mouvement est uniforme et calculer la vitesse. **3.** Calculer la période de révolution.

En français	**1.** Le système est l'ISS, le référentiel est géocentrique, la seule force est l'attraction de la Terre, dirigée vers le centre : $\vec{F}_{T/ISS} = G\,M_T\,m_{ISS} / d^2 \times (-\vec{u})$, où $d = R_T + h$ et $\vec{u}$ est dirigé de la Terre vers l'ISS. La deuxième loi de Newton donne l'accélération : **dirigée vers le centre de la Terre** ($\vec{u}_N = -\vec{u}$), de valeur $GM_T/(R_T+h)^2$, indépendante de la masse de l'ISS.
En formules	$$r = R_T + h = 6{,}37\times10^{6} + 4{,}0\times10^{5} = 6{,}77\times10^{6}\ \text{m}$$ $$a = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{(6{,}77\times10^{6})^2} \approx 8{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$
En français	**2.** Dans le repère de Frenet, $\vec{a}$ = (dv/dt) $\vec{u}_T$ + (v²/r) $\vec{u}_N$. Comme l'accélération n'a qu'une composante selon $\vec{u}_N$, on a dv/dt = 0 : la vitesse est **constante**, le mouvement est **uniforme**. En identifiant la composante normale, on obtient la vitesse.
En formules	$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{6{,}77\times10^{6}}} \approx 7{,}68\times10^{3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$
En français	**3.** En une période, l'ISS parcourt le périmètre de son orbite à la vitesse constante v. La période est donc de l'ordre d'**une heure et demie** : l'ISS fait environ 16 tours de la Terre par jour.
En formules	$$T = \frac{2\pi\,(R_T+h)}{v} = \frac{2\pi\times6{,}77\times10^{6}}{7{,}68\times10^{3}} \approx 5{,}54\times10^{3}\ \text{s} \approx 92\ \text{min}$$

6 Capacité numérique : tester la troisième loi de Kepler

En français	Au programme, on exploite à l'aide d'un langage de programmation des données astronomiques pour **tester les lois de Kepler**. Avec a en unités astronomiques (UA) et T en années, le rapport T²/a³ doit valoir environ 1 pour toutes les planètes du Système solaire, puisqu'elles tournent autour du même astre.

```
import numpy as np

# (demi-grand axe a en UA ; période T en années)
planetes = {"Mercure": (0.387, 0.241), "Vénus": (0.723, 0.615),
            "Terre": (1.000, 1.000), "Mars": (1.524, 1.881),
            "Jupiter": (5.203, 11.86), "Saturne": (9.537, 29.46)}

for nom, (a, T) in planetes.items():
    print(f"{nom:8s}  T²/a³ = {T**2 / a**3:.2f}")
```

Résultat : $T^2/a^3 \approx 1{,}00$ an²·UA⁻³ pour chacune des six planètes, ce qui confirme la troisième loi.

7 Synthèse

Grandeur	Expression
Force de gravitation (valeur)	$F_{A/B} = F_{B/A} = G\dfrac{m_A\, m_B}{d^2}$
Accélération (orbite circulaire)	$\vec{a} = G\dfrac{M}{r^2}\,\vec{u}_N$
Vitesse (orbite circulaire)	$v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r}}$
Période et 3ème loi (cercle)	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G\,M}} \qquad \dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M}$
3ème loi de Kepler (ellipse)	$\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_{\text{astre}}}$
Altitude géostationnaire	$h = \sqrt[3]{\dfrac{G\,M_T T^2}{4\pi^2}} - R_T$

Erreurs fréquentes à éviter

- Confondre le **demi-grand axe a** et l'**accélération a**.
- Oublier que **r = R_T + h** : l'altitude h seule n'est pas le rayon de l'orbite.
- Oublier de **convertir** les unités : km en m, heures et jours en secondes.
- Croire que la constante de la 3ème loi est universelle : elle dépend de l'**astre attracteur**.
- Penser que la vitesse d'un satellite dépend de sa masse : elle ne dépend que de **M** et de **r**.
- Inverser périhélie et aphélie : la vitesse est **maximale au périhélie**.